1　質量、運動量、エネルギーの保存則

流体は分子からなるので、運動としては分子の**個別の運動**とその**平均の運動**の二つに大別される。流体力学では分子の個別の運動は直接考慮せずに、平均の運動のみに注目する。個別運動の効果は平均運動に対する圧力や粘性に反映させる。

点 $\boldsymbol{x}$ の周りに v の体積をとり、その中に含まれる流体の質量を v で割った平均量を**密度場** $\rho(\boldsymbol{x})$ として定義する。v をどれだけの大きさにとるかであるが、v の中で分子同士が頻繁に衝突を繰り返して、そこでは分子が**局所的に熱平衡**になることができるほどの大きさである。同じように体積 v に渡って分子の速度の平均をとると、個別運動は均されて、滑らかな**速度場** $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ が得られる。**圧力場** $p(\boldsymbol{x})$ は v に含まれる分子の個別運動による平均圧力である。**温度場** $T(\boldsymbol{x})$ も局所的な温度として同様に定義される。点 $\boldsymbol{x}$ での粗視化された**流体粒子**は速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$、温度 $T(\boldsymbol{x})$、圧力 $p(\boldsymbol{x})$ を持つ。流体力学で現れる場は空間的にゆっくりと変動し、分子間の距離のようなスケールでは流体の場は定義されない。

流体力学で現れる方程式は、**保存則**の形をとる。以下では最も基本的な質量と運動量とエネルギーの保存則を導く。

1.1　質量保存則

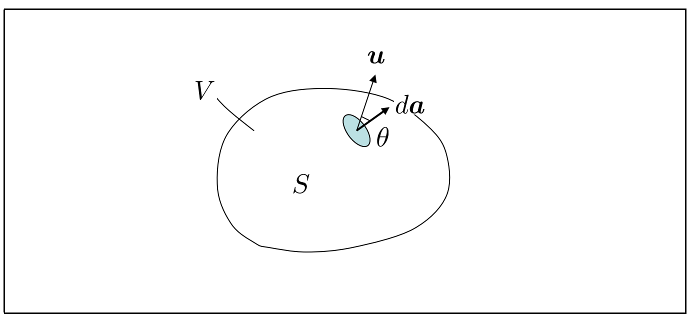

図 1.1: 質量保存則

図 1.1 のような体積 V の中の流体要素を考えよう。密度を $\rho(\boldsymbol{x})$ とすれば、点 $\boldsymbol{x}$ の周りの微小体積 $d\boldsymbol{x} = dxdydz$ に含まれる質量は $\rho(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ であるから、V に含まれる流体の質量 $\int_V \rho(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ の増加率は

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_V \frac{\partial \rho(\boldsymbol{x})}{\partial t}d\boldsymbol{x} \tag{1.1}$$

である。増えた量は体積 V の表面 S を通って流れ込んだ流体の質量である。S の微小面積要素 $d\boldsymbol{a}$ を通って単位時間当たりに流れ出た流体の体積は、$\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{a}$ であるから、それに ρ を掛けて、S に渡っての和

$$\int_S \rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{a} = \int_V \nabla\cdot(\rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} \tag{1.2}$$

が単位時間に流れ出た流体の質量である。右辺に移項する際には**ガウスの定理**を用いた。(1.2) にマイナス符号を付けたものが (1.1) と等しくなければならない。被積分関数が一定とみなせるほどに体積 V を小さくとれば、微分形で

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{x})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) = 0 \tag{1.3}$$

と書ける。これを**連続の式**とよび、質量保存則を表している。ベクトルの成分表示で書けば、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j = 0 \tag{1.4}$$

となる。第 2 項目を展開すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \tag{1.5}$$

同じ添字（今の場合は j）が 2 度現れれば、それに関して和をとるという**アインシュタインの便法**を採用している。

流体の速度が音速より十分に小さな通常の流れでは、流体の密度は時間、空間的に一定であり、流体は**非圧縮**である。$\rho =$ 一定 を (1.5) に代入すれば、

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad \text{或いは} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{1.6}$$

となる。これを**非圧縮条件**と呼ぶ。高速で運動する物体の周りの流体以外のほとんどの流体では**非圧縮流体**の近似が用いられる。高速流体の場合は流体の圧縮性が重要になり、(1.5) を用いなければならない。

運動量保存則に移る前に (1.3) の構造について述べておきたい。ρ が密度なら、$\rho \boldsymbol{u}$ はそれに関する**フラックス***である。フラックスの発散がその変化率である。もしフラックスが空間的に一定なら、発散はゼロになり、その点での流体の密度は変化しないことになる。一般的にある任意の物理量を $c(\boldsymbol{x})$ と書き、それに関するフラックスを $J_i^{(c)}(\boldsymbol{x})$ とすれば、物理量 c の保存則は

$$\frac{\partial c(\boldsymbol{x})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} J_j^{(c)}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{1.7}$$

と表される。

1.2 運動量保存則

次に、流体の速度場に対する方程式を導こう。その出発点は運動量の保存則である。質量保存則を導いたのと同じ精神で、体積 V の中の運動量の増減を計算する。その寄与には 3 種類あって、(1) 流体粒子が運動量を持ち込む、(2) 外部の流体の圧力が表面を通じて内部の流体に力を及ぼす、(3) 流体の粘性効果による運動量の輸送、である。

***流束**ともいう。

点 $\boldsymbol{x}$ の周りに体積 V の要素を考える。そこに含まれる i 方向の運動量の時間変化は

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} \tag{1.8}$$

である。運動量 ρu_i を持って流れ込むフラックスは $(\rho(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ であるから、その発散にマイナス符号を付けたもの

$$-\int_V \nabla\cdot(\rho(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} \tag{1.9}$$

が (1.8) に寄与する。

箱の中の運動量を増加させるもう一つの要因は、箱の表面を通じて伝えられる外部の圧力による運動量変化である。圧力は表面に垂直に力を及ぼすから、微小面積要素 $d\boldsymbol{a}$ を通して単位時間に伝えられる運動量は、$-p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{a}$ である。マイナスは、圧力は面積に垂直に内向きに働くからである。したがって表面積 S を通じて単位時間当たりに伝えられる運動量は

$$-\int_S p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{a} \tag{1.10}$$

である。この表面積分を体積積分に直したい。そのために (1.10) と任意のベクトル $\boldsymbol{n}$ の内積をとり、ガウスの定理を使うことにする：

$$-\boldsymbol{n}\cdot\int_S p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{a} = -\int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{n}p(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{n}\cdot\int_V \nabla p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

となる。任意の $\boldsymbol{n}$ に対して成り立つから、(1.10) は

$$-\int_V \nabla p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \tag{1.11}$$

の体積積分になる。

(1.9) と (1.11) の i 成分を (1.8) と結びつければ、運動量保存の微分形

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_i u_j = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{1.12}$$

が導かれる。この式で (1.4) を用いて、ρ の時間微分を消去すると、u_i に対する式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{1.13}$$

が得られる。(1.13) は粘性のない流体に対して成り立ち、**オイラー方程式**と呼ばれる（章末問題 1.1）。

現実の流体には粘性があり、それによっても運動量の輸送があるので、(1.12) の運動量保存則にも粘性の効果を取り込まなければならない†。粘性効果による輸送をどのように表現できるかを知るために、(1.12) を保存形式に書き換える:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial J_{ij}}{\partial x_j} = 0. \tag{1.14}$$

†ラッシュアワーの人の流れの中で、ある人たちが周りより速く x 方向に歩くと、周りの遅い人たちとの摩擦で x に垂直な方向に x 方向の運動量を失う。

ここで $J_{ij} = \rho u_i u_j + p\delta_{ij}$ であり、それは i 方向の運動量の j 方向へのフラックスである。これに粘性によるフラックス σ_{ij} を足す：

$$J_{ij} = \rho u_i u_j + p\delta_{ij} - \sigma_{ij}. \tag{1.15}$$

すると (1.14) は

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} \tag{1.16}$$

となり、オイラー方程式 (1.13) に右辺の第 2 項が付け加わったものになる。

σ_{ij} は**粘性ストレステンソル**と呼ばれるが、その形は次のような要請から決められる：（1）σ_{ij} は速度勾配に比例する。このような流体を**ニュートン流体**と呼び、通常の流体がそれに対応するが、高分子、コロイド溶液は非ニュートン流体である。（2）(1.15) の他の項からも分かるように、i, j の交換に関して対称的である。この要請を満たす最も一般的な形は

$$\sigma_{ij} = \mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\delta_{ij}\right] + \zeta(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\delta_{ij} \tag{1.17}$$

である（章末問題 1.2）。μ の関係する項は、**せん断流**（速度ベクトルの大きさがそれに垂直な方向に変化する）での摩擦の効果を表し、一方 ζ の項は**膨張流**、**圧縮流**での摩擦の大きさを表す。μ と ζ はそれぞれ**剪断粘性係数**、**体積粘性係数**と呼ばれる。

(1.17) を (1.16) に代入すれば、

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\Delta u_i + \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}. \tag{1.18}$$

これを**ナヴィエ・ストークス方程式**と呼ぶ（章末問題 1.3）。非圧縮流体では一層簡単になり、

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\Delta u_i, \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1.20}$$

となる。ここで $\nu = \mu/\rho$ であり、**動粘性係数**と呼ぶ。(1.19) が流体力学の簡潔にして、最も基本的な方程式である。

1.3 エネルギー保存則

流体のエネルギーは、速度場の運動エネルギーと分子の個別運動の運動エネルギーである内部エネルギーの和と捉えなければならない。単位質量当たりの内部エネルギーを ε とすれば、単位体積当たりのエネルギー密度は $\rho u^2/2 + \rho\varepsilon$ である。エネルギーフラックスを $\boldsymbol{J}^e$ とすれば、やはり保存形式で表現されなければならない：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}J_j^e = 0. \tag{1.21}$$

まずエネルギー密度の時間変化を計算しよう：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\rho\varepsilon\right)=\frac{1}{2}u^2\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

$\partial\rho/\partial t$ に (1.4)、$\partial\boldsymbol{u}/\partial t$ に (1.16) を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\rho\varepsilon\right) &= -\frac{1}{2}u^2\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})-\rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla\frac{1}{2}u^2-\boldsymbol{u}\cdot\nabla p\\ &+ u_i\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}-\varepsilon\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})\end{aligned}\tag{1.22}$$

となる。単位質量当たりのエントロピーを s、体積を v とした熱力学の方程式 $d\varepsilon=Tds-pdv=Tds+(p/\rho^2)d\rho$ を用いると、

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=T\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{p}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}=T\frac{\partial s}{\partial t}-\frac{p}{\rho^2}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}).$$

上の式を (1.22) に代入し、エンタルピー $w=\varepsilon+p/\rho$ を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\rho\varepsilon\right) &= -\frac{1}{2}(u^2+w)\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})-\rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla\frac{1}{2}u^2-\boldsymbol{u}\cdot\nabla p\\ &+ \rho T\frac{\partial s}{\partial t}+u_i\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}.\end{aligned}\tag{1.23}$$

$dw=Tds+dp/\rho$ より導かれる $\nabla p=\rho(\nabla w-T\nabla s)$ と

$$u_i\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}(u_i\sigma_{ik})-\sigma_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\cdot\sigma)-\sigma_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

を (1.23) に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\rho\varepsilon\right)&=-\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{u}\left(\frac{1}{2}u^2+w\right)-\boldsymbol{u}\cdot\sigma-\chi\nabla T\right]\\ &+\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla s\right)-\sigma_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\nabla\cdot(\chi\nabla T).\end{aligned}\tag{1.24}$$

ここで全体として寄与がない $\nabla\cdot(\chi\nabla T)$ を付け加えた。(1.24) が (1.21) の形をとるためには、

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla s\right)=\sigma_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\nabla\cdot(\chi\nabla T)\tag{1.25}$$

でなければならない。するとエネルギー保存則

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\rho\varepsilon\right)=-\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{u}\left(\frac{1}{2}u^2+w\right)-\boldsymbol{u}\cdot\sigma-\chi\nabla T\right]\tag{1.26}$$

が得られる。ここで $\sigma_{ik}u_k$ は粘性散逸による熱エネルギーフラックス、$\chi\partial T/\partial x_i$ は温度勾配に伴う熱フラックスである。

(1.25) は温度の緩和の仕方を記述していることが次のように分かる。圧力勾配の緩和と温度勾配の緩和の速さは大きく異なっていて、前者は圧倒的に速い（音波が圧力の緩和に働く）。対流現象など温度が緩和する過程はゆっくりした過程なので、そこでは圧力は十分に緩和しているので、**等圧過程**になる。したがってエントロピー変化は圧力一定のもとで起こると仮定できる。s を T, p の関数とすれば、$p =$ 一定 であるので、

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \nabla s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \nabla T$$

が得られる。これらを (1.25) に代入して、$T(ds/dT)_p$ が定圧比熱 c_p であることを用いれば、温度に対する式

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T\right) = \nabla \cdot (\chi \nabla T) + \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

が得られる。ここで右辺の第 1 項は温度勾配による拡散を表し、第 2 項は流体運動のエネルギーが粘性により熱に変換される効果を表す。非圧縮流体では、σ_{ik} に (1.17) を代入して、ρc_p で割れば、

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2. \qquad (1.27)$$

ここで $\kappa = \chi/\rho c_p$ は**温度拡散係数**である。

1.4 2 種類の時間微分

上で導かれた方程式 (1.5)、(1.16)、(1.27) を眺めると、

$$\frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (1.28)$$

のような偏微分の組が現れることに気付くであろう。流体力学ではこの偏微分をひとまとめにして

$$\frac{d}{dt} \quad \text{或いは} \quad \frac{D}{Dt} \qquad (1.29)$$

と書き、これを**ラグランジュ微分**と呼ぶ。一方単なる時間の偏微分 $\partial/\partial t$ を**オイラー微分**と呼ぶ。この 2 種類の時間微分の違いを考えることは大変意義深い。

そのためにある物理量 $f(\boldsymbol{x}, t)$ の時間変化に注目しよう。点 $\boldsymbol{x}$ に立ち止まって f の時間変化を記録すれば、

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \qquad (1.30)$$

が求められる。しかし流体と共に動く座標系から見た時間変化も意味があろう。時刻 t に点 $\boldsymbol{x}$ に流体要素があったとしよう。そのときの f の大きさは $f(\boldsymbol{x}, t)$ である。この流体要素は時刻 $t + dt$ に $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)dt$ にいるから、流体に乗った座標系での f の変化は、

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)dt, t + dt) - f(\boldsymbol{x}, t) \\ &\quad = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}, t)\right) dt \end{aligned} \qquad (1.31)$$

であり（章末問題 1.4)、時間変化の割合は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \nabla\right) f(\boldsymbol{x}, t) \equiv \frac{df}{dt} \tag{1.32}$$

となり、ラグランジュ微分で表されることになる。すなわち固定した座標系での時間変化はオイラーの時間微分で表され、流体とともに動く座標系での時間変化はラグランジュ微分で表される。

ある点に１滴のインクを垂らして、そのインクの濃度を時間的に追ってみよう。数学的な取り扱いでは、オイラーの時間微分が便利である。しかし物理的には、インクと共に動きながら、インクの塊が拡散によりどのように拡がるかを調べることが必要なこともある。その場合はラグランジュ微分が便利である。$\boldsymbol{u}$ のオイラー微分の方程式 (1.19) は**移流項**（**慣性項**ともいう）$u_j \partial_j u_i$ （∂_j は $\partial/\partial x_j$ の簡略形である）のために $\boldsymbol{u}$ の非線形方程式になっていて、このことが流体現象の解析を極めて困難にしている。ラグランジュ微分では移流項は明白に現れないので、(1.19) は $\boldsymbol{u}$ の線形方程式になっているように見えるが、どのような速度場に乗るかが指定されていないから本質的に非線形である。

問題 1.1。(1.12) から (1.13) を導きなさい。

問題 1.2。粘性による運動量フラックスが (1.17) で表されることを一般的な議論により示しなさい。

問題 1.3。(1.15)，(1.17) を (1.14) に代入して、質量保存則 (1.4) を用いれば、(1.18) となることを示しなさい。

問題 1.4。(1.31) の右辺を導きなさい。