5　フェルマーの定理

幾何光学での光の伝播の仕方は**フェルマーの定理**で表現できる。それによると光は所要時間が最短になるような経路をとる。その理由は後ほど述べることにして、今の時点ではこれを信じていろいろな問題に適用しよう。

5.1　反射の法則

図 5.1 のように点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ からでた光が鏡上の点 $\mathrm{O}(x, 0)$ で反射されて、点 $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ へ到達する。屈折率を $n = 1$ とすれば、P から O を経由して Q までにかかる時間は、光速を c とすれば、

$$T(x) = \frac{1}{c}\left[\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}\right]$$

である。$T(x)$ が最小になる x は $dT/dx = 0$ より、

$$\frac{x_1 - x}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} = \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}.$$

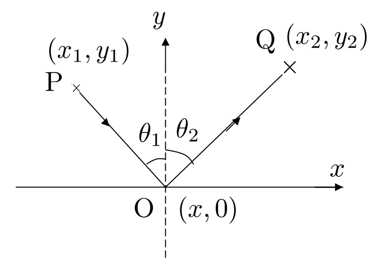

図 5.1: 光の反射

これより導かれる $\sin\theta_1 = \sin\theta_2 \to \theta_1 = \theta_2$ は**反射の法則**としてよく知られている。

5.2　屈折の法則

反射の法則では、伝播経路を 1 個の変数 x だけで指定できたが、光の伝播速度が場所により異なる場合はもっと一般的な取り扱いが必要である。光の伝播速度 v は屈折率を n とすれば $v = c/n$ である。屈折率は場所により異なり、$n(x, y)$ であるとすれば、光が x, y から $x + dx, y + dy$ へ行くのに要する時間 dt は

$$dt = \frac{n(x, y)}{c}\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

であるので、P を出て、Q に進む光は

$$T = \frac{1}{c}\int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} \sqrt{1 + (y')^2}\; n(x, y) dx \tag{5.1}$$

を最小にするようなルートを選択する。

屈折率 n が高度 y にだけ依存する媒質中を光が伝播する場合を考えよう。すると

$$F(y, y') = \frac{1}{c}\sqrt{1 + (y')^2}\; n(y)$$

であるので、(2.5) が便利である。それより

$$\frac{1}{c}\frac{n(y)}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{一定}.$$

点 x, y での光の進路と鉛直線となす入射角を θ すれば、

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \sin\theta(x,y)$$

であるので、

$$n(y)\sin\theta(x,y) = \text{一定} \tag{5.2}$$

が解である。

(5.2) の応用問題を考えよう。屈折率が n_1 の媒質から屈折率が n_2 の媒質へ入射する場合、入射角を θ_1、屈折角を θ_2 とすれば、(5.2) より、

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$$

となり、**スネルの法則**が導ける。

蜃気楼は屈折率が大気の密度に依存するために現れる現象である。何種類かのタイプがあり、富山湾での春の蜃気楼は立山からの雪解け水が富山湾に流れ込み、海面の方が温度が低く、屈折率が高度と共に減少するのが原因である。(5.2) によれば、上空へ行くほど入射角 θ が大きくなり、ついにはある高度で $\theta = \pi/2$ になった点で、図 5.2 のように下方に戻ってくることになる。したがって P の像は R 方向からやってくるので、遠くの物体は浮き上がって見える。

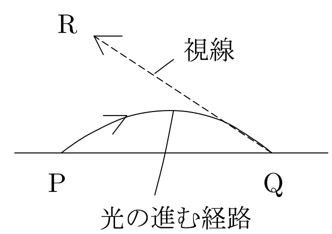

図 5.2: 蜃気楼

原点 $(0,0)$ での光が水平線に対して θ_0 の角度で出たとすると、その後の光の路は

$$y' = \sqrt{\frac{n(y)}{n_0\cos\theta_0^2} - 1}$$

である。ここで n_0 は $y=0$ での屈折率である。

$n(y) = n_0$ ならば、$y' = \tan\theta_0$ なので、角度 θ_0 で直進する。もし $n(y)$ が上方に行くにつれ増加するなら、$n(y) = n_0/\cos\theta_0$ で進行方向の勾配がゼロになり、反射されて、

$$y' = -\sqrt{\frac{n(y)}{n_0\cos\theta_0^2} - 1}$$

にしたがって下方に進むことになる。

5.3　光の波動性によるフェルマーの定理の解釈

なぜ光は所要時間最小の経路をとるのであろうか。賢い光は経路ごとの所要時間をあらかじめ計算し、そのうちの最小の経路を選ぶのであろうか。事実は、めったやたらにいろいろの経路をとり、結果的に最小経路が生き残る。(ダーウィンの進化論では、最適なものが最初から決まっているわけでなく、多数の死屍累々の犠牲の上で、結果的に最適なものが生き残るのとよく似ている。)

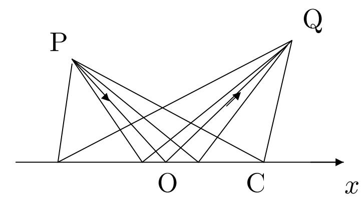

図 5.3: 光波の伝播

これを明らかにするために光は波動であることを出発点にして、先の反射の問題を取り上げる。点 P で光の波が放出され、点 O だけではなく、図 5.3 のように反射面の広い領域で反射されて Q に到達するとしよう。点 P で放出された光波が点 C を経由して点 Q に到着するのに時間 t_c だけかかるとする。点 P で振動数 ω の波 $A\mathrm{e}^{i\omega t}$ が放出され、それが図 5.3 のように反射面のいろいろな点で反射され、時刻 t に点 Q で観測される波はどのように表されるか。

波源 P では $A\mathrm{e}^{i\omega(t-t_\mathrm{c})}$ のように振動していたことになる。いろいろな反射点を経由するので、時刻 t に点 Q で観測される波は全ての経路 $\{C\}$ に渡っての重ね合わせになり、

$$\sum_{\{C\}} A\mathrm{e}^{i\omega(t-t_\mathrm{c})} = A\mathrm{e}^{i\omega t}\sum_{\{C\}}\mathrm{e}^{-i\omega t_\mathrm{c}} \tag{5.3}$$

の波が光源 P で放出されたことになる。 厳密にいうと振幅 A は経路によるが、簡単のために依らないと仮定している。

(5.3) を詳しく分析しよう。ここで経路による因子

$$I = \sum_{\{C\}}\mathrm{e}^{-i\omega t_\mathrm{c}}$$

を考えてみよう。いろいろな経路で t_c が異なるから、$\{C\}$ について和をとると、プラスをとったり、マイナスを取ったりするので、キャンセルしてしまうように思えるだろう。しかしそうではない。点 C の座標を x とし、t_c を $t(x)$ で表す。$t(x)$ は O 点 x_o で極小値 t_o をとるから、x_o の周りでテイラー展開して、$t(x) = t_\mathrm{o} + B(x-x_\mathrm{o})^2$ のように 2 次まで残せば、

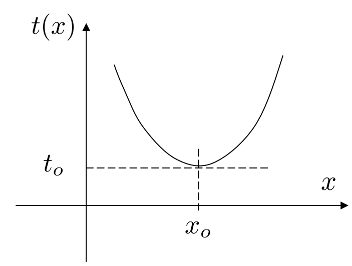

図 5.4: $t(x)$ の極小値の近傍の振る舞い

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-i\omega t_\mathrm{c}} &= \mathrm{e}^{-i\omega t_\mathrm{o}}\mathrm{e}^{-i\omega(t_\mathrm{c}-t_\mathrm{o})} \\ &= \mathrm{e}^{-i\omega t_\mathrm{o}}\mathrm{e}^{-iB\omega(x-x_\mathrm{o})^2} \end{aligned}$$

の形で書ける。$\{C\}$ に渡って、すなわち x に渡って足し算をすると、$x \approx x_\mathrm{o}$ の近傍では $B\omega(x-x_\mathrm{o})^2$ が小さいので、大きな寄与をする。したがって Q で観測される波は

$$A\mathrm{e}^{-i\omega t_\mathrm{o}}\int dx\mathrm{e}^{-iB\omega(x-x_\mathrm{o})^2} \sim A\mathrm{e}^{-i\omega t_\mathrm{o}}$$

となり、極小値の点 O の近傍で反射されたものだけが残る。これがフェルマーの定理の心である。

　最短距離のパスの近傍が寄与をすると言ったが、どのくらいの誤差がゆるされるか。波長程度の経路の広がりが許される。