12 回転座標系

地球に固定された座標系での運動には、地球自身が回転しているのでその回転の効果が現れる。有名な例としては、フーコー振り子で、その回転面がゆっくりと回転する。北極では一日に 1 回転する。その原因はコリオリ力である。コリオリ力のもっと大切な応用先は大気の運動である。大気の運動にはコリオリ力が欠かせず、東北地方の梅雨寒の原因はこれである。あるいは、海水は風によって流されるが、その方向は風向きとは平行になっていない。（流体力学での Ekman 流れ。）

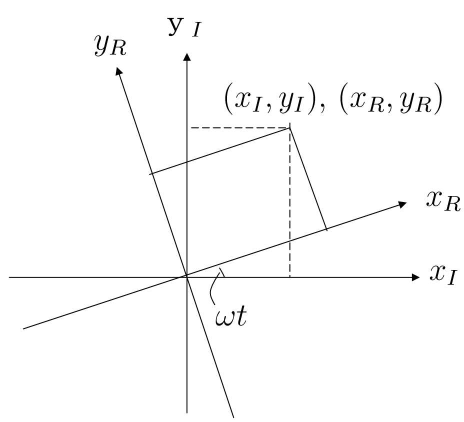

図 1: 固定座標系 x_I, y_I, z_I と z 軸の周りに角速度 ω で回転している回転座標系 x_R, y_R, z_R。

12.1 回転座標系での運動方程式

図 1 で $x_I - y_I$ は静止座標系、それに対して z 軸の周りに角速度 ω で回転している座標系を $x_R - y_R$ で表している。物体の位置を静止座標系では (x_I, y_I, z_I)、回転座標系では (x_R, y_R, z_R) で表す。時刻 $t = 0$ で両座標系が一致していたとすると、

$$x_I = x_R \cos\omega t - y_R \sin\omega t, \tag{12.1}$$
$$y_I = y_R \cos\omega t + x_R \sin\omega t, \tag{12.2}$$
$$z_I = z_R, \tag{12.3}$$

(12.1) を t で 2 回微分する：

$$\begin{aligned}
\dot{x}_I &= \dot{x}_R \cos\omega t - \omega x_R \sin\omega t - \dot{y}_R \sin\omega t - \omega y_R \cos\omega t, \\
\ddot{x}_I &= \ddot{x}_R \cos\omega t - 2\omega \dot{x}_R \sin\omega t - \omega^2 x_R \cos\omega t \\
&- \ddot{y}_R \sin\omega t - 2\omega \dot{y}_R \cos\omega t - \omega^2 y_R \sin\omega t
\end{aligned} \tag{12.4}$$

同様に (12.2) を 2 回微分すれば、

$$\begin{aligned}\dot{y}_I &= \dot{y}_R \cos\omega t - \omega y_R \sin\omega t + \dot{x}_R \sin\omega t + \omega x_R \cos\omega t, \\ \ddot{y}_I &= \ddot{y}_R \cos\omega t - 2\omega \dot{y}_R \sin\omega t - \omega^2 y_R \cos\omega t \\ &+ \ddot{x}_R \sin\omega t + 2\omega \dot{x}_R \cos\omega t - \omega^2 x_R \sin\omega t. \end{aligned} \tag{12.5}$$

(12.3) より、

$$\ddot{z}_I = \ddot{z}_R \tag{12.6}$$

である。

これらを用いて、回転座標系での運動方程式を求めよう。慣性系と回転系が一致する時刻 $t=0$ に注目しよう。(12.1-12.3) に $t=0$ を代入すると、$x_I = x_R, y_I = y_R, z_I = z_R$ となり、違いは (x_R, y_R, z_R) 系が ω で回転していることだけである。すなわち、(12.4, 12.5) で $t=0$ と置くと、回転の効果だけが取り入れられたことになる。(12.4, 12.5, 12.6) で $t=0$ と置くと、

$$\ddot{x}_I = \ddot{x}_R - \omega^2 x_R - 2\omega \dot{y}_R, \tag{12.7}$$

$$\ddot{y}_I = \ddot{y}_R - \omega^2 y_R + 2\omega \dot{x}_R \tag{12.8}$$

$$\ddot{z}_I = \ddot{z}_R. \tag{12.9}$$

静止座標系での運動方程式

$$m\ddot{x}_I = F_x, \quad m\ddot{y}_I = F_y, \quad m\ddot{z}_I = F_z \tag{12.10}$$

を、(12.7), (12.8), (12.9) に代入すると、回転座標系で書けた方程式がえられる：

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_R &= F_x + 2m\omega \dot{y}_R + m\omega^2 x_R, \\ m\ddot{y}_R &= F_y - 2m\omega \dot{x}_R + m\omega^2 y_R, \\ m\ddot{z}_R &= F_z. \end{aligned}$$

座標自体は $(x_I, y_I, z_I) = (x_R, y_R, z_R)$ であるので、回転座標系の添え字 $_R$ は省略して、

$$m\ddot{x} = F_x + 2m\omega \dot{y} + m\omega^2 x, \tag{12.11}$$

$$m\ddot{y} = F_y - 2m\omega \dot{x} + m\omega^2 y, \tag{12.12}$$

$$m\ddot{z} = F_z. \tag{12.13}$$

回転軸 z の方向の運動方程式は何ら回転の影響を受けない。x, y 方向には回転の影響を受けて、第 1 項目は通常の力、第 2 項目はコリオリ力、第 3 項目は遠心力を表す。

ベクトル表示をすれば、

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} + 2m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \tag{12.14}$$

となる。 ただし $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ である。

問題 1。ベクトル表示した (12.14) は (12.11-12.13) と一致することを示しなさい。

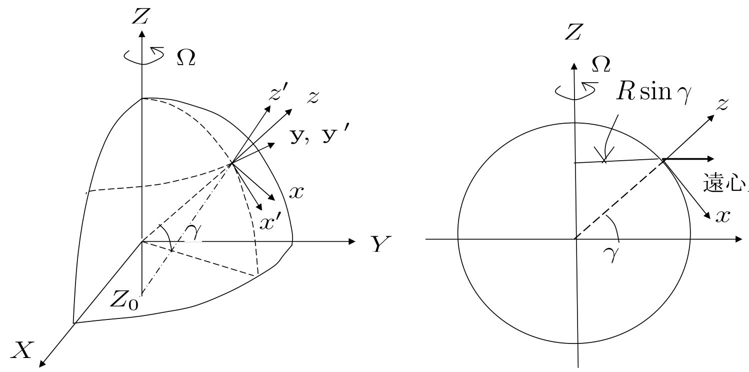

図 2: 回転する地球上での座標系。遠心力を加味した重力は $-z'$ の方向を向いている。

12.2 自由落下する物体へのコリオリ力の影響

地球上で落下する物体に対するコリオリ力の影響を考えよう。図 2 のように、z を上空方向にとり、x は赤道方向を向いていて、y は東を向いているとする。γ を緯度とする。考えている点での回転角速度は $\boldsymbol{\omega} = (-\Omega\cos\gamma, 0, \Omega\sin\gamma)$ である。Ω は地球の回転角速度で $\Omega = 7.27\times10^{-5}\mathrm{sec}^{-1}$ である。まず遠心力を計算しよう。回転系の原点の座標は $(0, 0, R)$ であるので、$\boldsymbol{r} = (x, y, z+R) \approx (0, 0, R)$ である：$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = (-\Omega^2 R\sin\gamma\cos\gamma, 0, -\Omega^2 R\cos^2\gamma)$. したがって遠心力と重力と加えた力は、

$$(m\Omega^2 R\sin\gamma\cos\gamma, 0, -mg + m\Omega^2 R\cos^2\gamma) \tag{12.15}$$

である。すなわち x 方向にも遠心力による力が働くことになる。これを防ぐには、z 方向を少し傾ければよい。すなわち z 軸の延長は地球の中心を通らないように選ぶ。それが図 1 の z' 軸である。それに垂直に赤道の方向に x' 軸にとる。y' は y と同じである。しかし (x, y, z) 系と (x', y', z') 系の違いは小さいことが分かる。なぜなら、遠心力 $\Omega^2 R = (7.3\times10^{-5})^2\times(6.4\times10^6) = 3.4\times10^{-2}\mathrm{m\ sec}^{-2}$ であるので、z 方向の重力加速度 $g = 9.8\mathrm{m\ sec}^{-2}$ に比べて 300 分の 1 だけ小さいので無視できて、物体に働く力は $\boldsymbol{F} = (0, 0, -g)$ である。z と z' を区別する必要はない。

これらの結果をすべて考えに入れて (12.14) を成分で表せば、

$$\ddot{x} = 2\Omega\sin\gamma\,\dot{y}, \tag{12.16}$$
$$\ddot{y} = -2\Omega(\sin\gamma\,\dot{x} + \cos\gamma\,\dot{z}), \tag{12.17}$$
$$\ddot{z} = -g + 2\Omega\cos\gamma\,\dot{y} \tag{12.18}$$

と表される。

問題 2。(12.16, 12.17, 12.18) を (12.14) から導きなさい。

上の方程式系は x, y, z の線形微分方程式であるので厳密に解けるが、近似的に解く方が有意義である。高い塔から物体を落下させたとき、コリオリ力は落下にどのような影響を持つかを知りたい。日常での経験から分かるように、この場合の落下も重力だけに影響を受ける自由落

下にちかい。すなわち、(12.18) での重力加速度の項が卓越している。初期条件は、高さ h の所（すなわち $\boldsymbol{r} = (0, 0, h)$）から速度ゼロを選ぶ。第 0 近似では、

$$\ddot{z} = -g, \quad \dot{z} = -gt, \quad z = h - (1/2)gt^2$$

である。第 1 近似は上で求められた $\dot{z}$ を (12.17) に代入することである：

$$\ddot{y} = -2\Omega\cos\gamma\,\dot{z} = 2g\Omega\cos\gamma\,t.$$

これより、

$$\dot{y} = g\Omega\cos\gamma t^2, \quad y = \frac{1}{3}g\Omega\cos\gamma t^3.$$

第 2 近似として、この結果を (12.16) に代入する：

$$\ddot{x} = 2\Omega\sin\gamma\,\dot{y} = 2g\Omega^2\cos\gamma\sin\gamma t^2.$$

これより

$$x = \frac{1}{6}gt^4\Omega^2\cos\gamma\sin\gamma$$

が得られる。

赤道上の 100m の塔から投げ下ろしたら、$t = \sqrt{2h/g} \sim 4.5\text{sec}$ で地上に到達する。この間に $y = 2.2 \times 10^{-2}\text{m}$ だけ東にドリフトする。

問題 3。南極の方向にはどれだけドリフトするか。（x の値のこと）

問題 4。z' 軸は静止座標系の $Z = 0$ を通らない。z' 軸が Z 軸と交わる点の Z 座標はいくらか。（図 2 の Z_0 の大きさである。）

問題 5。x, z 方向の遠心力を考えれば、上の結果はどのように修正されるかを考えなさい。（z, y の運動は大きな影響を受けないが、x の運動への影響は大きい。）

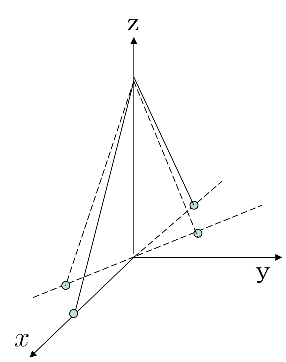

図 3: フーコー振子。振動面が z 軸の周りに時計回りに回転する。

問題 6。自由落下の方程式を解くにあたって用いた近似を正確に表すには、 x, y, z を Ωt のベキで展開する。$\Omega t \ll 1$ として、$x = \sum_n a_n(\Omega t)^n$, $y = \sum_n b_n(\Omega t)^n$, $z = h - (1/2)gt^2 + \sum_n c_n(\Omega t)^n$ とおいて、Ωt の各ベキで成り立つ関係式を導きなさい。それより、a_n, b_n, c_n を求めて、先に求めた結果と一致することを確かめなさい。

12.3 フーコー振子

博物館の玄関広間によくあるフーコー振子を考えよう。振子の腕の長さを ℓ とする。静止している場合には、支持点での座標を $(0,0,\ell)$、振り子の最下点は原点にある。コリオリ力を考慮に入れなければ、振動は $x-z$ 面でのみ起こるが、コリオリ力の影響で振動面は z 軸の周りにゆっくりと回転する。振り子の座標を (x,y,z) とすれば、運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T\frac{x}{\ell} + 2m\Omega\sin\gamma\dot{y}, \\ m\ddot{y} &= -T\frac{y}{\ell} - 2m\Omega\sin\gamma\dot{x} - 2m\Omega\cos\gamma\dot{z}, \\ m\ddot{z} &= T\frac{\ell-z}{\ell} - mg + 2m\Omega\cos\gamma\dot{y}. \end{aligned}$$

ここで T は振り子を支える糸の張力である。先端の軌道は $\ell^2 = x^2+y^2+(\ell-z)^2$, $x^2+y^2+z^2-2\ell z=0$ を満たさなければならない。微小振幅の振動に限る。すると x,y,z は小さいが、z は特に小さい。

問題 7。どうして z は x,y より小さいのか。

z に対する方程式より、$T=mg$ が導かれる。これを x,y に対する方程式に代入すれば、

$$\ddot{x} = -g\frac{x}{\ell} + 2\omega_0\dot{y}, \tag{12.19}$$

$$\ddot{y} = -g\frac{y}{\ell} - 2\omega_0\dot{x}. \tag{12.20}$$

ここで $\omega_0 = \Omega\sin\gamma$ である。

(12.19,12.20) を解く上手い方法は、オイラーの公式を利用することである。$\xi = x+iy$ と置けば、二つの式は

$$\ddot{\xi} + \frac{g}{\ell}\xi + i2\omega_0\dot{\xi} = 0 \tag{12.21}$$

にまとめられる。(12.21) で $\xi = A\mathrm{e}^{i\lambda t}$ と置けば、

$$A\mathrm{e}^{i\lambda t}\left(-\lambda^2 + \frac{g}{\ell} + 2i\omega_0 i\lambda\right) = 0$$

である。これより $\lambda = -\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 + g/\ell} \approx -\omega_0 \pm \sqrt{g/\ell}$ である。したがって

$$\xi = e^{-i\omega_0 t}\left(A\cos\sqrt{g/\ell}\,t + B\sin\sqrt{g/\ell}t\right)$$

と書ける。$x = \mathrm{Re}\xi$, $y = \mathrm{Im}\xi$ であるから、

$$\begin{aligned} x &= \cos\omega_0 t\left(A\cos\sqrt{g/\ell}\,t + B\sin\sqrt{g/\ell}t\right), \\ y &= -\sin\omega_0 t\left(A\cos\sqrt{g/\ell}\,t + B\sin\sqrt{g/\ell}t\right). \end{aligned} \tag{12.22}$$

振動面は時計回りに ω_0 の角速度で回転する。北極では一日に 1 回転する。緯度 θ のところでは、一日に $\sin\theta$ 回転する。

問題 8。(12.22) からどうして振動面が時計回りに ω_0 の角速度で回転することがわかるか。

12.4 地衡風

大気の運動は

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\beta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}$$

で書ける。ここで $\boldsymbol{f}$ は大気の圧力勾配の寄与で、圧力が大きな所から小さな所へ力が働く。β は摩擦抵抗である。風速が時間によらない場合は、

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{f}}{\beta}$$

となり、風は圧力勾配の方向に吹く。

問題 9。圧力場を $p(\boldsymbol{x})$ と書けば、$f_x = -\partial p/\partial x$, $f_y = -\partial p/\partial y$, $f_z = -\partial p/\partial z$ と書けることを確かめなさい。

しかし地球上の大気の運動ではコリオリの力を受ける。方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = 2\boldsymbol{u} \times \omega - \beta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}$$

のようになる。大気の水平方向の運動に限ろう。すると

$$\boldsymbol{u} \times \omega = (\Omega \sin\theta u_y, -\Omega \sin\theta u_x, 0) = \Omega \sin\theta \boldsymbol{u} \times \hat{z}$$

なので、定常的な速度は

$$2\Omega \sin\theta \boldsymbol{u} \times \hat{z} - \beta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f} = 0 \tag{12.23}$$

できまる。ここで速度は x, y 成分しかない。(12.23) と $\hat{z}$ との外積をとって、公式 $(\boldsymbol{u} \times \hat{z}) \times \hat{z} = -\boldsymbol{u}$ を用いると、

$$-2\Omega \sin\theta \boldsymbol{u} - \beta \boldsymbol{u} \times \hat{z} + \boldsymbol{f} \times \hat{z} = 0. \tag{12.24}$$

(12.23, 12.24) より、

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\beta} \frac{\boldsymbol{f} + (2\Omega \sin\theta/\beta) \boldsymbol{f} \times \hat{z}}{1 + (2\Omega \sin\theta/\beta)^2}$$

が導かれる。必ずしも風は圧力勾配の方向には吹かない。特に上空では摩擦係数 β は小さいので、$\beta = 0$ と置くと、

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{f} \times \hat{z}}{2\Omega \sin\theta}$$

となり、等圧線に沿って風が吹くことになる。この性質は天気図でよく見られる。

問題 10。昨日の天気図でこの現象を確かめなさい。