4　ローレンツ変換

一つの事象を、静止座標系 S とそれに対して x 方向に速度 v で動いている座標系 S$'$ の二つの座標系から眺めることにする。時刻 $t = t' = 0$ には両座標系は一致していた。

そのために、速度 v で x 方向に動く物差しを考えよう。図 4.1 参照。物差しの左端は時刻 $t = 0$ に原点にあった。物差しの右端の運動を一つの事象と考え、これを S 系と、S$'$ 系から眺める。右端の座標を S 系では (x, t)、S$'$ 系では (x', t') とする。

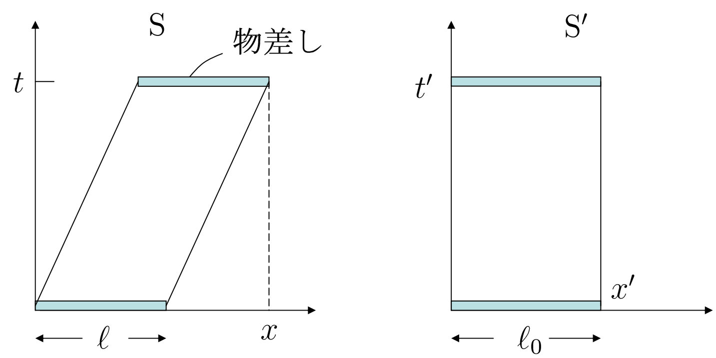

図 4.1: (a) 静止系からみた動く物差し、(b) 物差しに固定された座標系

S 系での物差しの長さ $\ell(= \ell_0\sqrt{1 - v^2/c^2})$、左端の座標は vt であるので、$x = \ell + vt$ である。S$'$ 系での長さは $x' = \ell_0$ であるので、

$$x - vt = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, x' \longrightarrow x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4.1}$$

である。なぜなら動いている物差しは短く見えるからである。

S$'$ 系の原点にある時計は、S 系の時計より $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ だけゆっくりと進む。しかし S 系から見ると、右端の時計は S$'$ 系の原点の時計よりさらに

$$\frac{vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4.2}$$

だけ遅れている。したがって

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4.3}$$

でなければならない。ここで (4.1) を用いると、

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4.4}$$

の関係が導かれる。

結局

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z' \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

となる。これをローレンツ変換と呼ぶ。公式が分からなくなったら、まずガリレー変換 $x' = x - vt$ を思い出そう。するとローレンツ収縮により、$\sqrt{1 - v^2/c^2}$ で割ることになる。時間の方は次元を合わせれば、$t' = t - vx/c^2$ にやはりなるではないか。

要点をもう一度書くと、

- $t = t' = 0$ で両座標系の原点は一致していた、
- 座標系 S で時刻 t に座標 x, y, z で起こった同じ現象が座標系 S′ で時刻 t' に座標 x', y', z' で起こったように見える、

ということである。

上で与えられたローレンツ変換の公式を用いるといろいろなことが確かめられる。

1. 時刻 $t = t' = 0$ に原点で発せられた光のパルスはどのように伝わるか。静止座標系では当然
$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$
である。これにローレンツ変換公式を代入すると、
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$
となり、慣性座標系でも同じ表現が得られる。

2. ローレンツ収縮。左端 $x' = 0, t'$ であり、右端は $x' = \ell_0, t'$ である。すると
$$x_L = \frac{vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x_R = \frac{\ell_0 + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$
すると
$$x_R - x_L = \frac{\ell_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
となり、動いている物差しは長く見えるではないか。この矛盾はどのように解決すべきか。
動いている物差しを静止座標系で観測した時刻はローレンツ変換公式より、
$$t_L = \frac{t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t_R = \frac{t' + v\ell_0/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
となるから、動いている物差しを同時刻に観測したことになっていないので矛盾はない。

そこで動いている座標系では同じ時刻 t に測定をしなければならない。その時の左端を x_L、右端を x_R とすれば、

$$x'_L = \frac{x_L - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad x'_R = \frac{x_R - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

であるから、

$$x'_R - x'_L = \frac{x_R - x_L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

となり、ローレンツ収縮が導ける。

3. 時間膨張。原点にある時計と共に動いている座標系を考えよう。時刻ゼロで原点は一致していたから、

$$x' = t' = 0, \quad x = t = 0.$$

座標系 S' では $x' = 0,\, t' = t_0$ であるから、ローレンツ変換によれば、

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

となり、時間膨張が得られる。

4. ドプラー効果

静止していれば振動数 ν_0 の電磁波をだす物体が速度 v で遠ざかる場合、静止した我々が受け取る電磁波の振動数 ν はどのような値をとるか。光源を動く座標系 S' の原点に固定して、静止座標系 S の原点で観測することにする。$t = t' = 0$ で S と S' の原点は一致していた。$t = t' = 0$ に最初のパルスが放出される。第 2 のパルスが発せられる事象は

$$\begin{cases} (x = x_1, t = t_1) & \text{in S}, \\ (x' = 0, t' = t'_1) & \text{in S}'. \end{cases}$$

ローレンツ変換より、

$$t_1 = \gamma(t'_1 + v x'_1/c^2) = \gamma t'_1, \qquad x_1 = \gamma v t'_1$$

となる。第 2 のパルスが S 系の原点に到着するには x_1/c だけの時間がかかるから、そのパルスが原点に到着する時刻 t_2 は

$$t_2 = t_1 + \frac{x_1}{c} = \gamma t'_1 + \frac{\gamma v t'_1}{c} = \gamma(1 + v/c)t'_1$$

となる。静止した電磁波の振動数は $\nu_0 = 1/t'_1$、遠ざかる電磁波の振動数は $\nu = 1/t_2$ であるから、

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\gamma}{\nu_0}(1 + v/c) \to \nu = \nu_0\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

となり、電磁波のドプラー効果の式が得られる。もし $v \ll c$ なら、

$$\nu = \nu_0(1 - v/c)$$

が導かれる。

最も顕著なドプラー効果の例は宇宙の膨張による赤方偏移である。宇宙はビッグバン以来膨張を続けていて、遠くの銀河ほど速い速度で後退している。静止している原子のスペクトル線の波長を λ_0、我々が観測する波長を λ とすれば、赤方偏移の大きさを $z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$ で測る。もし $v \ll c$ ならば、$z = v/c$ である。クェサーの中には $z = 5$ のようなものもある。その場合は $v/c = 36/37$ となり、ほぼ光速で遠ざかっていることになる。

最後にローレンツ変換をもう少し対称的な形に書く。先に述べたローレンツ変換では、x と t の次元がことなるので、t の代わりに $\tau \equiv ct$ を用いる。すると、

$$x' = \gamma(x - \beta\tau), \quad y' = y, \quad z' = z \quad \tau' = \gamma(\tau - \beta x) \tag{4.5}$$

のように簡単になる。ここで $\beta = v/c$, $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$ である。