4　グリーン関数：ポアッソン方程式

　電磁気で現れるポアッソン方程式をフーリエ変換で解いてみよう。静電ポテンシャル ϕ は電荷密度 ρ を用いて次のようなラプラス方程式で表される：

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

このタイプの微分方程式の極めて広い分野で現れる。例を挙げれば、静電場、重力場、流体での速度ポテンシャルなどの決定においでである。そのために一般的な形の方程式

$$\Delta\phi = -s \tag{4.1}$$

を考える。s は場 ϕ を作り出す源 $source$ の場である。(4.1) を解くために、Green 関数 $G(\boldsymbol{x})$ を導入するのが便利である：

$$\Delta G(\boldsymbol{x}) = -\delta(\boldsymbol{x}). \tag{4.2}$$

すると (4.1) の答えは

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int d\boldsymbol{x}' G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')s(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}' \tag{4.3}$$

と表される。

　(4.3) が (4.1) を満たすのは次のように分かる。(4.3) のラプラシアンをとると、

$$\Delta\phi(\boldsymbol{x}) = \int d\boldsymbol{x}'\Delta G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')s(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}' = -\int d\boldsymbol{x}'\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')s(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}' = -s(\boldsymbol{x})$$

となり、(4.1) が導かれたことになる。

　(4.2) をフーリエ変換の方法によりとく。フーリエ変換と逆変換の定義は次の通りである。一般的なケースを扱うために次元は d とする。

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}) = \int f(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}, \tag{4.4}$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \hat{f}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k}. \tag{4.5}$$

この変換が正しいことは次のように確かめられる。(4.5) に (4.4) を代入すれば、

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int f(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\int \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,d\boldsymbol{k} \tag{4.6}$$

しかし

$$\int \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}d\boldsymbol{k} = (2\pi)^d\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4.7}$$

の関係を用いると、(4.6) の右辺は左辺と一致する。(4.7) はフーリエ関数 $\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ の完全性とよばれる。重要なことは $f(\boldsymbol{x})$ と $\hat{f}(\boldsymbol{k})$ に含まれる情報はまったく同等であり、実空間もフーリエ空間のどちらで扱ってもよい。

それでは (4.2) をフーリエ変換で解こう。

$$G(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \hat{G}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k}, \tag{4.8}$$

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k} \tag{4.9}$$

を (4.2) に代入して、関数 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ の完全性から

$$\hat{G}(k) = \frac{1}{k^2} \tag{4.10}$$

である。$\hat{G}(k)$ はベクトル $\boldsymbol{k}$ の大きさ k にしかよらないので、引数は k だけである。(4.10) を (4.8) に代入すれば、

$$G(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k} \tag{4.11}$$

である。

4.1　１次元

１次元の場合はこの方法は適用しにくい。その場合は元の方程式に立ち返る：

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x) = -\delta(x). \tag{4.12}$$

$x \neq 0$ 以外では右辺はゼロであるので、

$$G(x) = \begin{cases} ax & x > 0 \\ -ax & x < 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

(4.12) を $x = -\delta(> 0)$ から $x = \delta$ まで積分すると

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|_{-\delta}^{\delta} = -1.$$

これに (4.13) を代入すると、

$$2a = -1 \to a = -\frac{1}{2}.$$

したがって

$$G(x) = -\frac{1}{2}|x| \tag{4.14}$$

である。

4.2　２次元

波数 $\boldsymbol{k}$ の座標を $(k, \theta$ とし、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{k}$ のなす角度を θ とすれば、$d\boldsymbol{k} = kdkd\theta$ であるので、

$$
\begin{aligned}
G(r) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{dk}{k}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ikr\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dk}{k} J_0(kr) \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\pi J_0(kr) = \int_0^\pi \mathrm{e}^{ikr\cos\theta} d\theta
$$

を用いた（岩波数学公式集３）。(4.15) を r で微分して、$\partial J_0(kr)/\partial r = -kJ_1(kr)$ を用いると、

$$
\begin{aligned}
\frac{dG(r)}{dr} &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty J_1(kr)dk \\
&= \frac{1}{2\pi r} J_0(kr)\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2\pi r}. \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

ここで $\int J_1(kr)dk = -(1/r)J_0(kr)$ を用いた。上の式を r で積分すると、

$$
G(r) = -\frac{1}{2\pi}\log r \qquad (4.17)
$$

が導かれる。

例として、単位長さあたり σ の電荷をもつ線電荷の作る電場を求めよう。電荷から r だけ離れた点での電位は

$$
\phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\log r \qquad (4.18)
$$

4.3　３次元

波数 $\boldsymbol{k}$ の座標を (k, θ, φ) とし、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{k}$ のなす角度を θ とすれば、$d\boldsymbol{k} = k^2 dk \sin\theta d\theta d\varphi$ であるので、$\cos\theta = \mu$ とすれば、

$$
\begin{aligned}
G(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathrm{e}^{ikr\mu} \\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dk \frac{\sin kr}{kr} = \frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^\infty dt \frac{\sin t}{t} \\
&= \frac{1}{4\pi r}. \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

ここで $\sin t/t$ の $t=0$ から $t=\infty$ の定積分は $\pi/2$ である。

4.4 任意の次元

知的トレーニングもたまには必要である。任意の次元 d の世界に遊んでみよう。デカルト座標はもちろん $(x_1, x_2, \cdots, x_d)$ で表される。d 次元極座標は、３次元を単に拡張して考えることにすれば、$(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{d-1})$ で表される。

$$x_1 = r\cos\theta_1,\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2,\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \cdots,$$
$$x_d = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{d-1}.$$

３次元では x_1 は z であり、x_2 は x、x_3 は y であった。角度 θ_i の定義領域は、

$$0 \le \theta_1,\ \theta_2, \cdots, \theta_{d-2} \le \pi, \quad 0 \le \theta_{d-1} \le 2\pi$$

である。Jacobian は

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_d)}{\partial(r, \theta_1, \cdots, \theta_{d-1})}$$

であり、行列式を計算すれば、

$$J = r^{d-1}\sin^{d-2}\theta_1\sin^{d-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}$$

である。

問題 4-1. Jacobian が上のようになることを示しなさい。（ヒント：３次元で行って、それを拡張しよう。）

半径 R の d 次元球の体積 $V_d(R)$ を計算しよう。

$$\begin{aligned} V_d(R) &= \int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_d^2 \le R^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_d \\ &= \int_0^R r^{d-1}dr \int \sin^{d-2}\theta_1 \sin^{d-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{d-2} dr d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{d-2} d\theta_{d-1} \\ &= \frac{R^d}{d} S_d. \end{aligned} \tag{4.20}$$

ここで S_d は d 次元単位球の表面積で

$$S_d = 2\pi \int_0^\pi \sin^{d-2}\theta_1 d\theta_1 \int_0^\pi \sin^{d-3}\theta_2 d\theta_2 \cdots \int_0^\pi \sin\theta_{d-2} d\theta_{d-2}. \tag{4.21}$$

次のような公式

$$\int_0^\pi \sin^n\theta d\theta = 2\int_0^1 (1-\mu^2)^{(n-1)/2} d\mu = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n+2)/2)}$$

を用いれば、

$$S_d = 2\pi\sqrt{\pi}\frac{\Gamma((d-1)/2)}{\Gamma(d/2)}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma((d-2)/2)}{\Gamma((d-1)/2)}\cdots\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3/2)} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \tag{4.22}$$

ここで $\Gamma(z)$ はガンマ関数であり、

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}$$

で定義され、$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z)$ のような性質がある。$\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ である。(4.22) より、$S_2 = 2\pi$, $S_3 = 4\pi$, $S_4 = 2\pi^2, \cdots$ が得られる。

d 次元のグリーン関数はフーリエ変換に頼ると、

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int \frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{k} = \frac{S_{d-1}}{(2\pi)^d}\int_0^\infty dk k^{d-3}\int_0^\pi d\theta \mathrm{e}^{ikr\cos\theta}\sin^{d-2}\theta \\ &= \frac{S_{d-1}}{(2\pi)^d}\frac{1}{r^{d-2}}\int_0^\infty t^{d-3}dt\int_0^\pi \mathrm{e}^{it\cos\theta}\sin^{d-2}\theta d\theta = \frac{C_d}{r^{d-2}} \end{aligned} \tag{4.23}$$

である。ここで

$$C_d = \frac{S_{d-1}}{(2\pi)^d}\int_0^\infty t^{d-3}dt\int_0^\pi \mathrm{e}^{it\cos\theta}\sin^{d-2}\theta d\theta$$

である。角度に関する積分は次のように実行できる：

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{it\cos\theta}\sin^{d-2}\theta d\theta = 2\int_0^1 (1-\mu^2)^{(d-3)/2}\cos\mu t d\mu = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(d/2-1/2)}{(t/2)^{d/2-1}}J_{d/2-1}(t).$$

ここで $J_{d/2-1}(t)$ は $d/2-1$ 次のベッセル関数である。これを用いると、

$$C_d = \frac{S_{d-1}}{(2\pi)^d}\sqrt{\pi}\Gamma(d/2-1/2)2^{d/2-1}\int_0^\infty t^{d/2-2}J_{d/2-1}(t)dt.$$

ベッセル関数の積分には次のような公式がある：

$$\int_0^\infty t^{\mu-1}J_\nu(t) = \frac{2^{\mu-1}\Gamma((\nu+\mu)/2)}{\Gamma((\nu-\mu)/2+1)}.$$

これより

$$\int_0^\infty t^{d/2-2}J_{d/2-1}(t)dt = \frac{2^{d/2-2}\Gamma(d/2-1)}{\Gamma(1)}$$

であるので、

$$C_d = \frac{S_{d-1}}{(2\pi)^d}\sqrt{\pi}\Gamma(d/2-1/2)2^{d/2-1}\frac{2^{d/2-2}\Gamma(d/2-1)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{(d-2)S_d}$$

となるので、

$$G(r) = \frac{1}{(d-2)S_d}\frac{1}{r^{d-2}} \tag{4.24}$$

となる。

よりストレートな方法は (4.2) を直接解く方法である。原点にデルタ関数を置いたグリーン関数は r だけの関数である。したがって、$r \neq 0$ では

$$\Delta G(r) = \frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial}{\partial r}G(r)\right) = 0$$

である。したがって、

$$r^{d-1}\frac{\partial}{\partial r}G(r) = C \to \frac{\partial}{\partial r}G(r) = \frac{C}{r^{d-1}} \to G(r) = \frac{C}{2-d}r^{2-d}.$$

係数 C は次のように決まる。(4.2) を半径 r の球で積分すると、右辺は -1 であるが、左辺はガウスの定理を用いると、

$$\int_{V_r} \nabla \cdot \nabla G dV = \int_{S_r} \nabla G \cdot d\alpha = \frac{C}{r^{d-1}} S_d r^{d-1} = CS_d \to C = -\frac{1}{S_d}$$

ゆえに

$$G(r) = \frac{1}{(d-2)S_d}\frac{1}{r^{d-2}} \tag{4.25}$$